

Etude des réseaux de diffraction



Un réseau est constitué par la répétition périodique d'un motif diffractant, comme par exemple une fente.

Les interférences entre les rayons issus des nombreux motifs successifs privilégient alors précisément certaines directions dans lesquelles l'énergie lumineuse est envoyée.

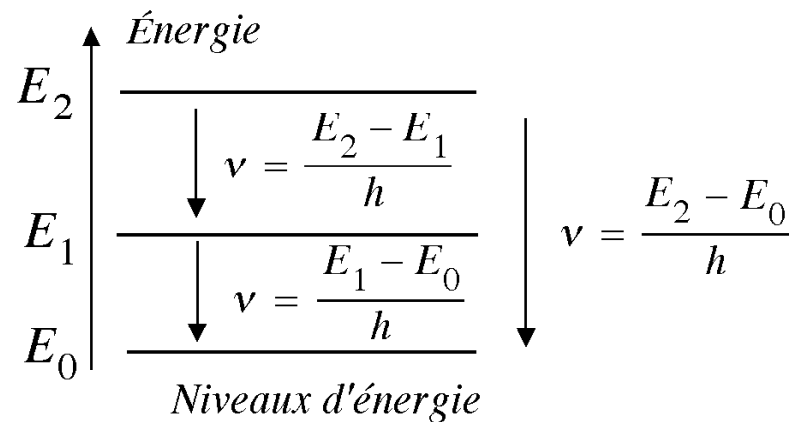
Ce chapitre traite de la diffraction de la lumière par un réseau ainsi que de ses applications.



I) Intérêt d'un réseau :

Spectre d'émission :

$$\Delta E = h \nu \quad (h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (\text{constante de Planck}))$$



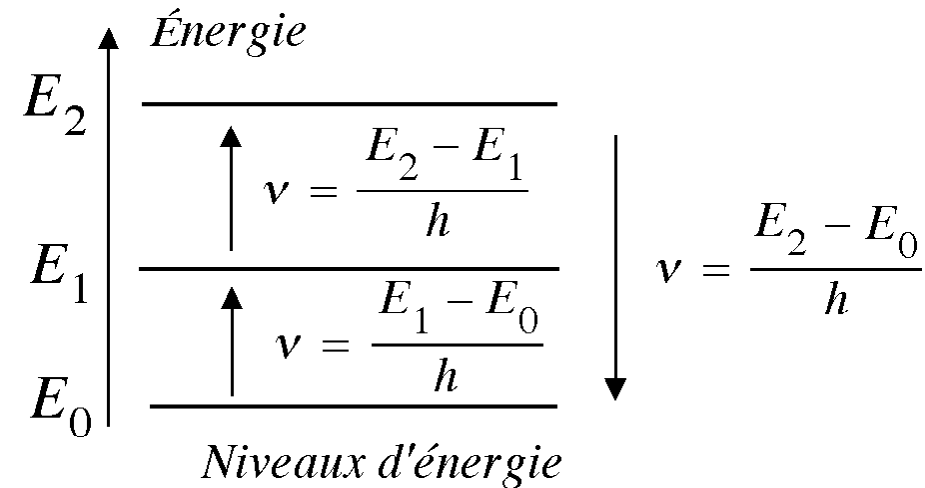
L'étude des spectres d'émission permet de connaître la composition du gaz.

En astronomie, on peut ainsi connaître la composition des gaz de la couche externe des étoiles.

En raison de l'effet Doppler, les fréquences sont un peu décalées ; on peut en déduire la vitesse avec laquelle l'étoile observée s'éloigne de la Terre.

Spectre d'absorption :

Lorsqu'un faisceau de lumière blanche traverse un milieu « transparent », ce dernier absorbe sélectivement des radiations caractéristiques du milieu traversé.



L'étude du spectre d'absorption permet de connaître la composition du milieu absorbant.

II) Réseau par transmission :

Un réseau par transmission est constitué par un très grand nombre de fentes parallèles et équidistantes.

Il est souvent constitué par une lame de verre sur laquelle on a tracé un très grand nombre de traits parallèles et équidistants (de l'ordre de 500 traits par millimètre !).

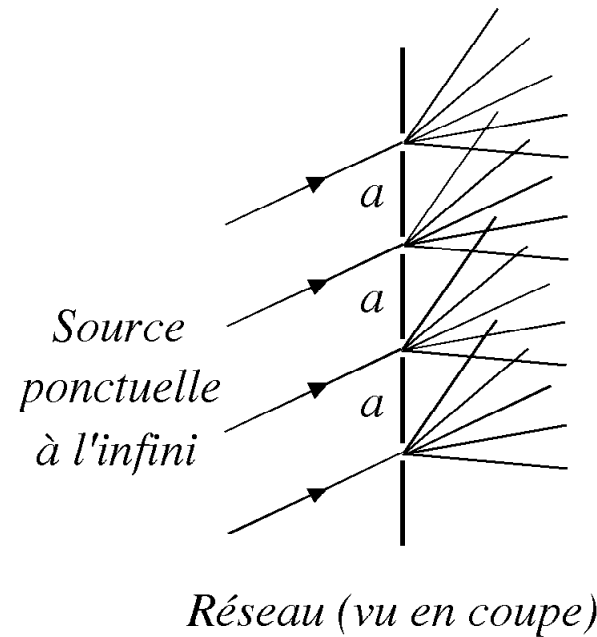
La distance a entre deux fentes successives s'appelle le *pas du réseau*.

Densité de traits : Le réseau est caractérisé par son pas a qui est la distance séparant deux motifs diffractants consécutifs. On définit la densité de traits $n = \frac{1}{a}$ (nombre de traits par mètre). Le tableau suivant donne les ordres de grandeur pour différents types de réseau :

Qualité	n (m^{-1})	n (Lines Per Inch)	a (μm)	Largeur	N
moyenne		10^3	30	2 cm	~ 2000
Classique	$\sim 4 \cdot 10^5$	10^4	~ 3	3 cm	$\sim 10\ 000$
Excellente	$\sim 4 \cdot 10^6$	10^5	$\sim 0,3$	4 cm	$\sim 40\ 000$

Soit une source ponctuelle, à l'infini, qui éclaire le réseau.

Chaque fente diffracte la lumière.



Les rayons issus des différentes fentes interfèrent entre eux.

On s'intéresse seulement aux interférences à l'infini.

III) Théorie élémentaire du réseau :

Soit une source S ponctuelle et monochromatique, à l'infini, qui envoie un faisceau de lumière parallèle et arrivant sur le réseau sous l'angle d'incidence i .

On cherche les directions θ pour lesquelles l'intensité des rayons qui interfèrent à l'infini est maximale.

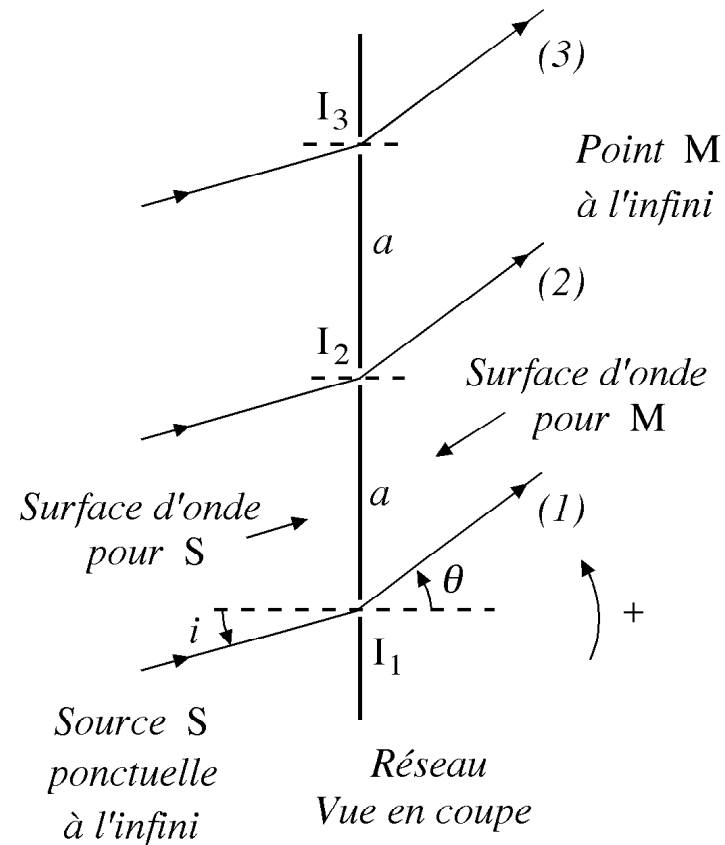
Il y a interférences à l'infini entre tous les rayons diffractés selon la direction θ .

L'amplitude diffractée par le réseau à l'infini résulte des interférences entre les rayons issus de tous les motifs éclairés : on parle d'interférences à N ondes

(dans le cas des trous d'Young, il s'agit d'interférences à deux ondes).

La différence de marche entre les deux rayons (1) et (2) est :

$$\delta = (SM)_1 - (SM)_2 = a \sin \theta - a \sin i = a(\sin \theta - \sin i)$$



Pour un angle d'incidence i donné, les angles θ correspondant à un maximum de lumière (les interférences entre les ondes issues de deux motifs successifs sont constructives) sont donnés par la relation : (« formule des réseaux »)

$$a(\sin \theta - \sin i) = m\lambda_0 \quad \text{soit} \quad \sin \theta - \sin i = m \frac{\lambda_0}{a}$$

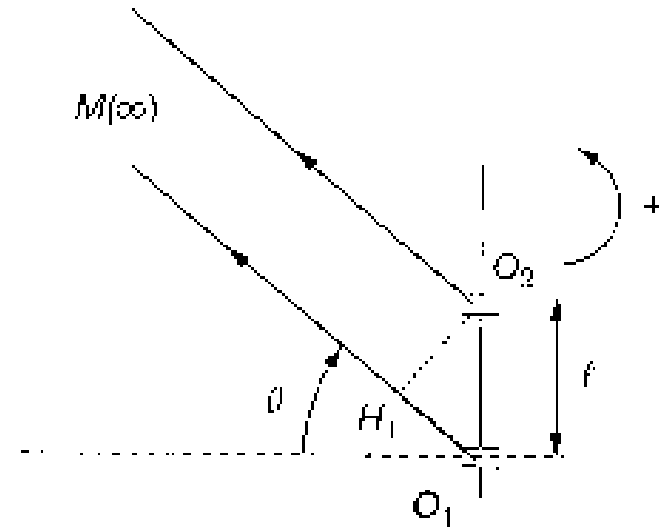
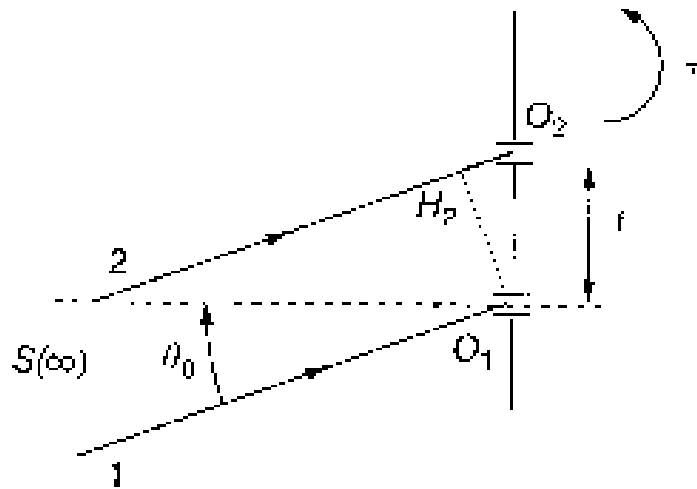
m est appelé l'ordre du spectre (c'est l'ordre d'interférences).

Pour un angle i donné, le nombre des valeurs de m est limité car :

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1$$

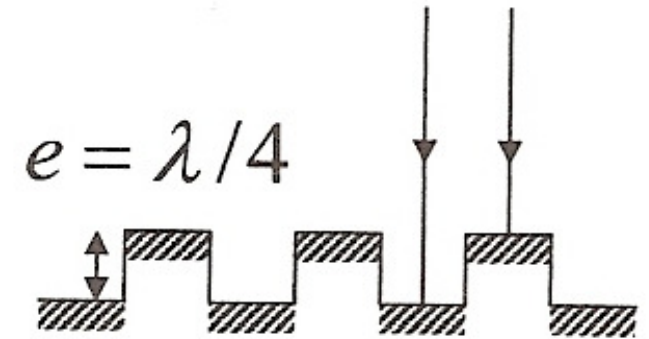
Cas d'un réseau en réflexion :

- Etablir la formule des réseaux pour un réseau en réflexion.
- Commenter la direction de l'ordre 0.



Un exemple d'application :

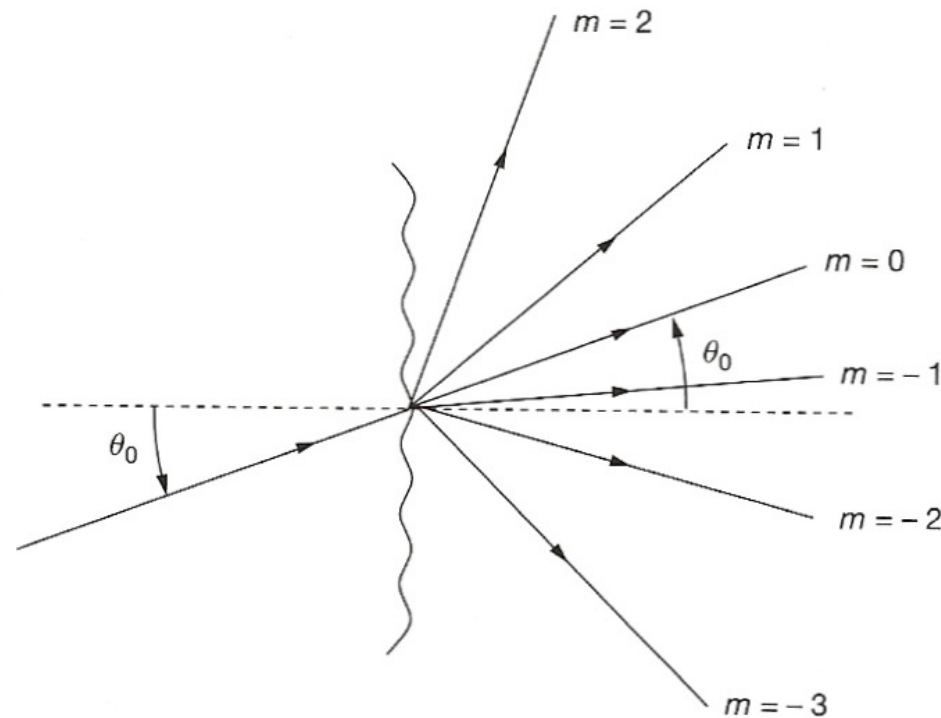
Le dispositif ci-contre est un réseau par réflexion composé de deux rangées décalées de minuscules facettes de miroirs. Lorsqu'il est éclairé normalement par une raie de longueur d'onde λ et que la différence des niveaux est $e = \lambda/4$, le maximum de lumière est-il renvoyé dans la direction de l'optique géométrique ?



IV) Interprétation de la formule des réseaux :

1 – Cas d'une lumière monochromatique :

On suppose que la source ne délivre qu'une seule longueur d'onde et on considère un réseau éclairé sous l'incidence i .



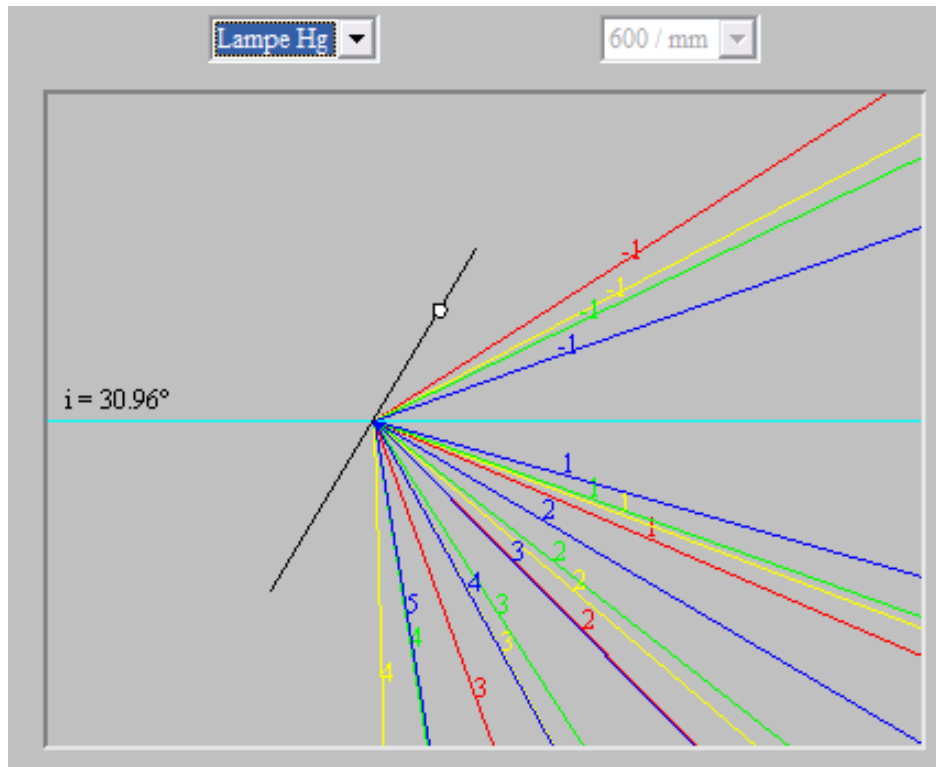
2 – Cas de la lumière blanche :

La solution dans la direction de l'optique géométrique :

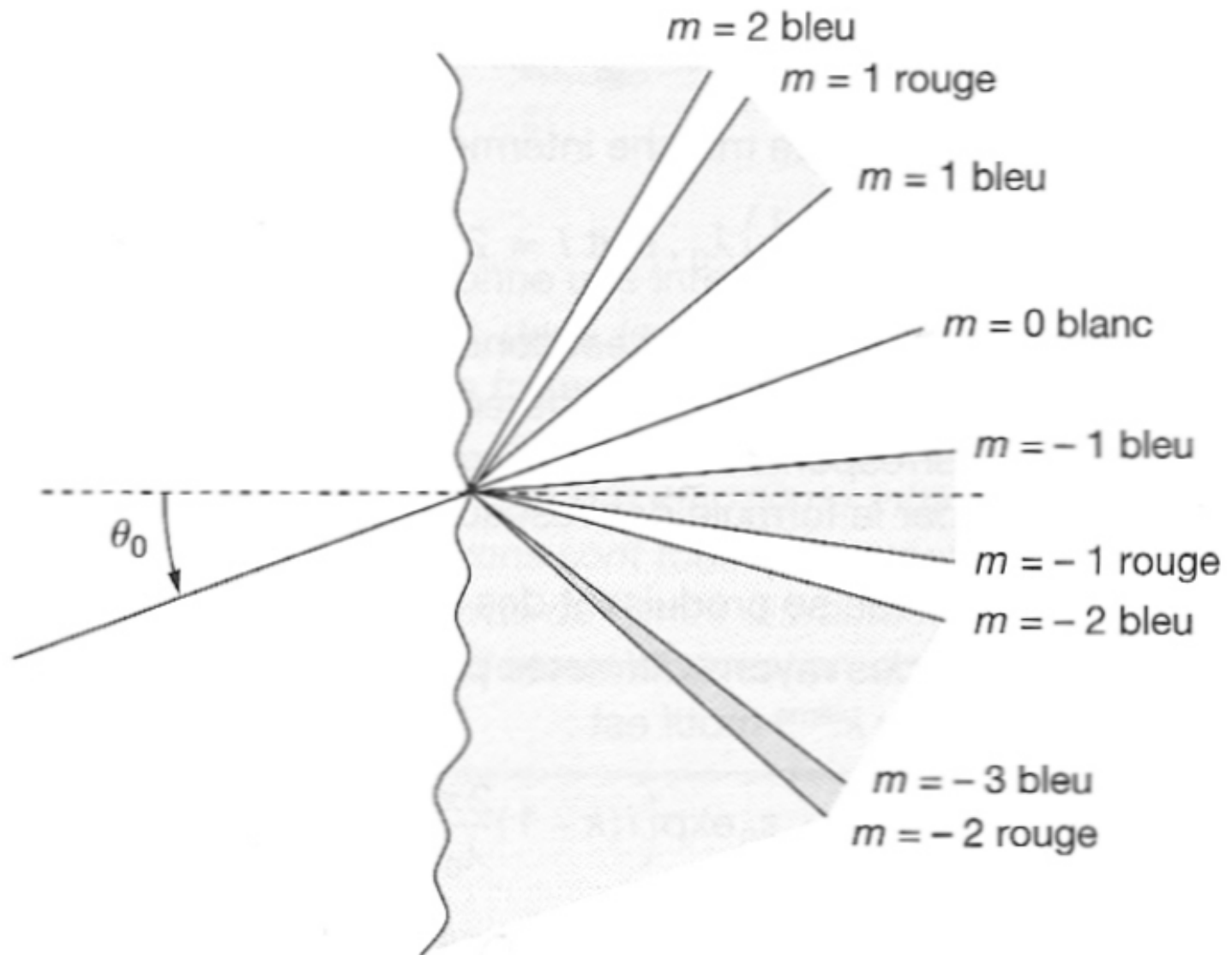
$$\theta = i \quad \text{pour} \quad m = 0$$

est valable indépendamment de la longueur d'onde.

Dans cette direction, on observera de la lumière blanche.



[Animation JJ.Rousseau](#)



Exercice d'application ; recouvrement des ordres :

Un réseau comportant $n_0 = 800$ motifs par millimètre est éclairé par une lampe à vapeur atomique en incidence normale.

Les longueurs d'onde sont comprises entre $\lambda_{\min} = 404,7 \text{ nm}$ (violet) et $\lambda_{\max} = 579,1 \text{ nm}$ (jaune).

Les spectres se recouvrent-ils et si oui, à partir de quel ordre ?

On évalue les déviations des longueurs d'onde extrêmes dans les différents ordres grâce à la formule des réseaux. La pas est donné par $\ell = 1/n_0 = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$.

On en déduit :

	m = 1	m = 2	m = 3
Violet	18,9°	40,4°	76,2°
Jaune	27,6°	67,9	/

(La jaune n'existe pas dans les ordres supérieurs ou égaux à 3).

Les ordres ne se recouvrent donc pas.

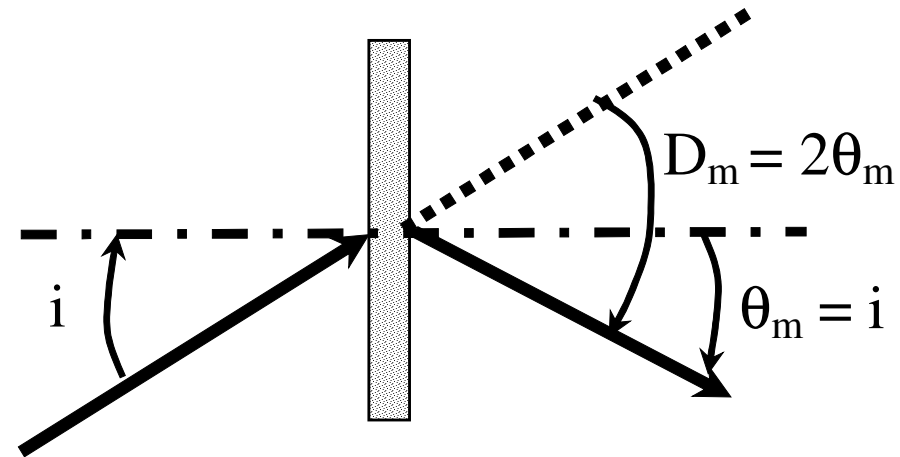
V) Etude expérimentale : (Voir TP)

1) Minimum de déviation dans un ordre donné :

Pour un ordre m donné, la déviation du rayon incident est :

$$D_m = \theta_m - i \quad (\text{Avec : } \sin \theta_m - \sin i = m \frac{\lambda_0}{a})$$

On cherche un extremum (que l'on supposera être un minimum) de D_m lorsque l'angle d'incidence i varie, pour un ordre m donné :



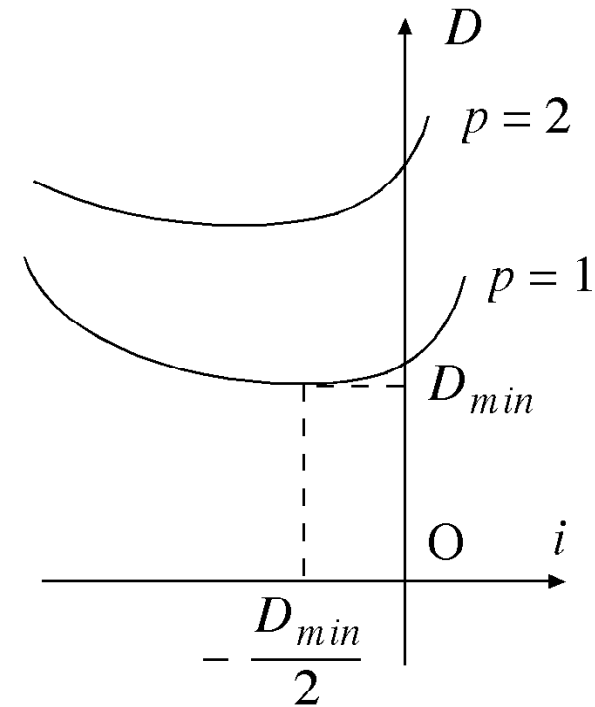
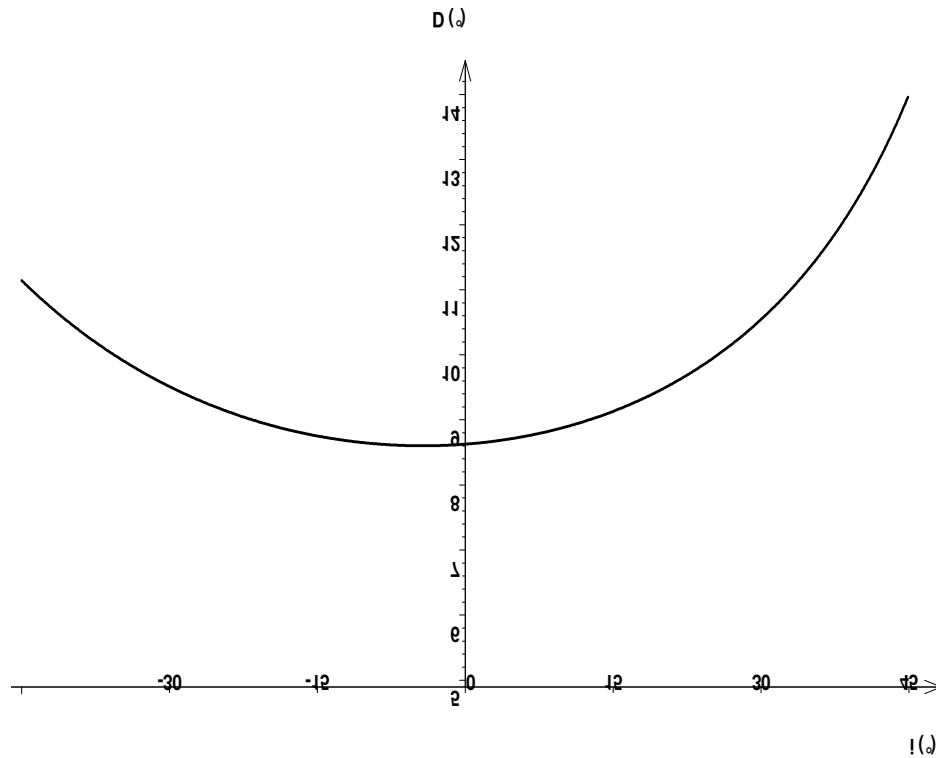
Le rayon diffracté est symétrique du rayon incident par rapport au réseau :

$$D_{\min} = 2\theta_m \quad \text{d'où} \quad \sin\left(\frac{D_{\min}}{2}\right) = \frac{m\lambda_0}{2a}$$

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} \quad (\text{Pour le prisme})$$

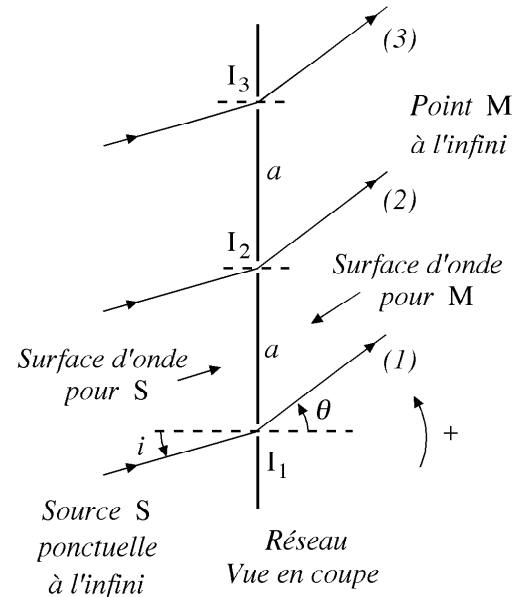
La courbe suivante a été tracée avec Regressi, avec un pas du réseau $p = 1 / a = 300$ traits / mm et une longueur d'onde dans le vide de 500 nm.

Cette courbe donne la déviation pour l'ordre 1 en fonction de l'angle d'incidence.



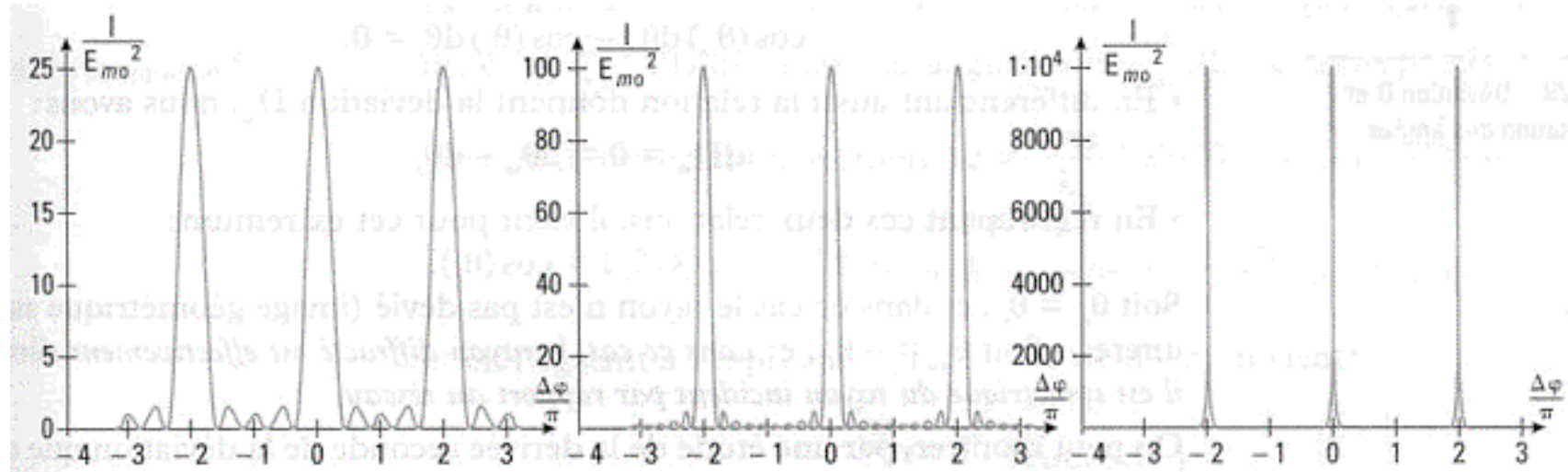
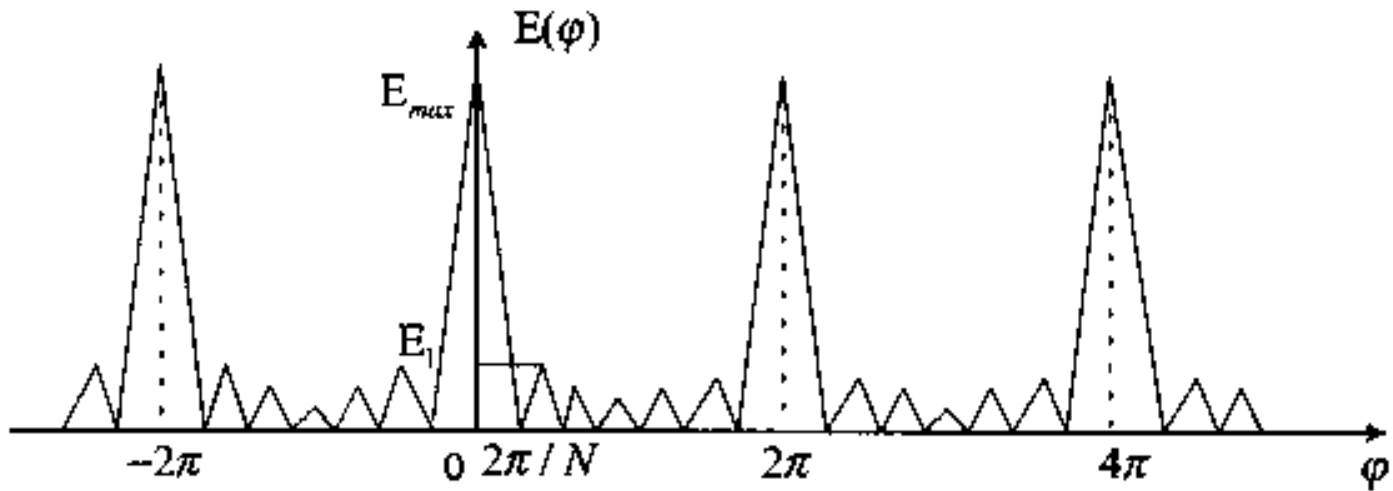
2) Intensité lumineuse dans un ordre donné :

On ne prend pas en compte dans un 1^{er} temps la diffraction par les motifs du réseau.



On note $\varphi = 2\pi \frac{a}{\lambda_0} (\sin \theta - \sin i)$ le déphasage entre deux rayons successifs.

$$I(\varphi) = \frac{1}{2} k |s_{tot}|^2 = I_0 \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{N^2 \sin^2(\varphi/2)}$$



Répartition de l'intensité pour des interférences à $N = 5, 10$ et 100 ondes

Dans cette partie, on prend en compte la diffraction :

Cette fois, il faut tenir compte de la diffraction non isotrope de chacune des fentes ; on aura ainsi :

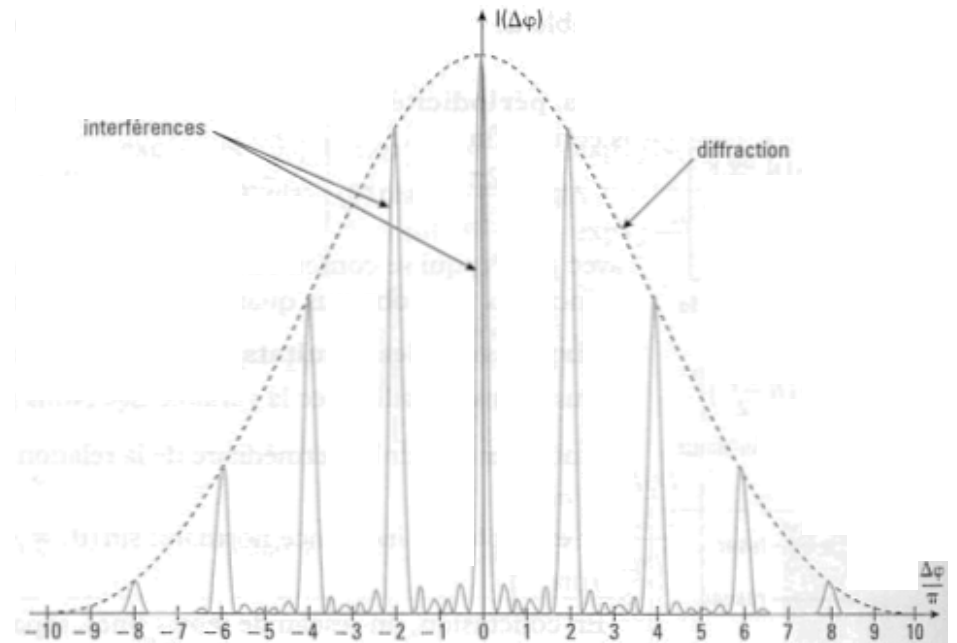
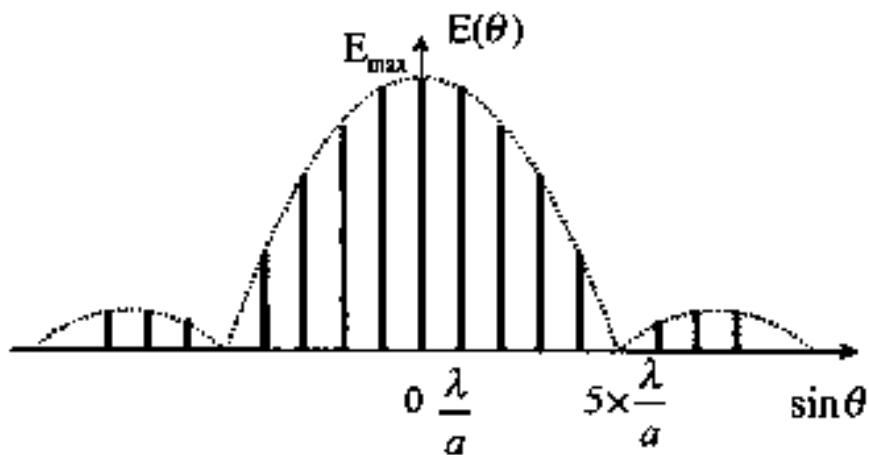
$$\underline{s}_1(\theta) = A(\theta)e^{i\omega t} = A_{\max} \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} \right) e^{i\omega t}$$

La suite du calcul est inchangée.

On obtient ainsi , en supposant ici $i = 0$:

$$I(\varphi) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} \right) \frac{\sin^2 (N\pi a \sin \theta / \lambda)}{N^2 \sin^2 (\pi a \sin \theta / \lambda)}$$

b étant plus petit que a, on voit que la « fonction diffraction » (le sinc^2) varie « moins vite » que la fonction « réseau » $\left(\frac{\sin^2(N\pi a \sin \theta / \lambda)}{N^2 \sin^2(\pi a \sin \theta / \lambda)} \right)$: c'est donc la 1^{ère} qui enveloppe la seconde.



3) Pouvoir dispersif d'un réseau :

On rappelle le déphasage entre deux rayons passant par deux traits consécutifs du réseau :

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = \frac{2\pi a}{\lambda_0} (\sin \theta - \sin i)$$

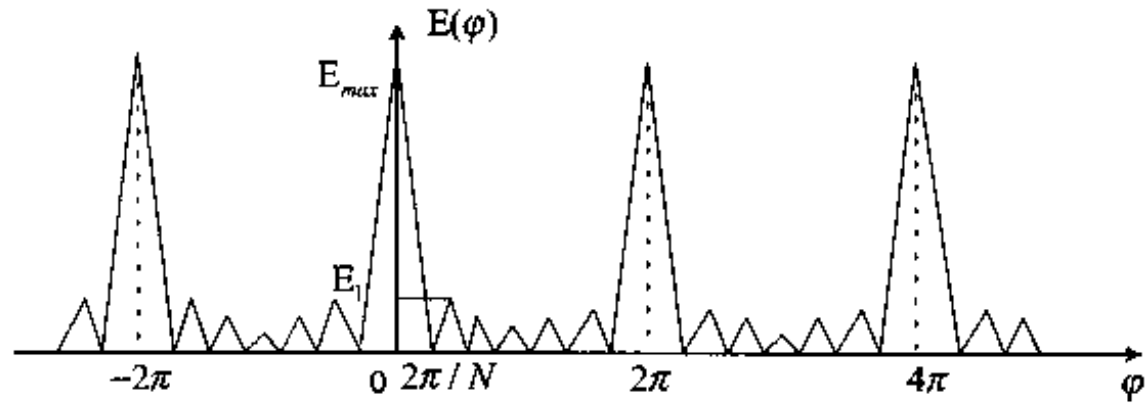
Soient L la longueur du réseau éclairé, a le pas du réseau et N le nombre de traits éclairés :

$$L = Na$$

On a montré au paragraphe précédent qu'un maximum principal a une demi-largeur angulaire (prise à mi-hauteur du pic d'intensité) égale à :

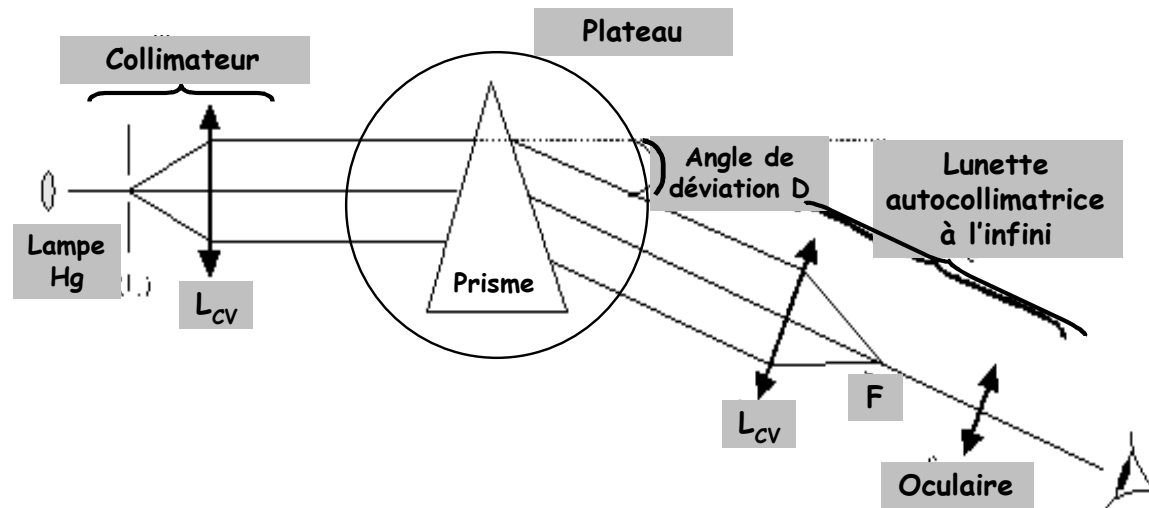
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$$

L'analyse spectrale de la lumière sera convenable si le réseau sépare correctement la lumière dans un ordre donné et si deux ordres différents ne se recouvrent pas.

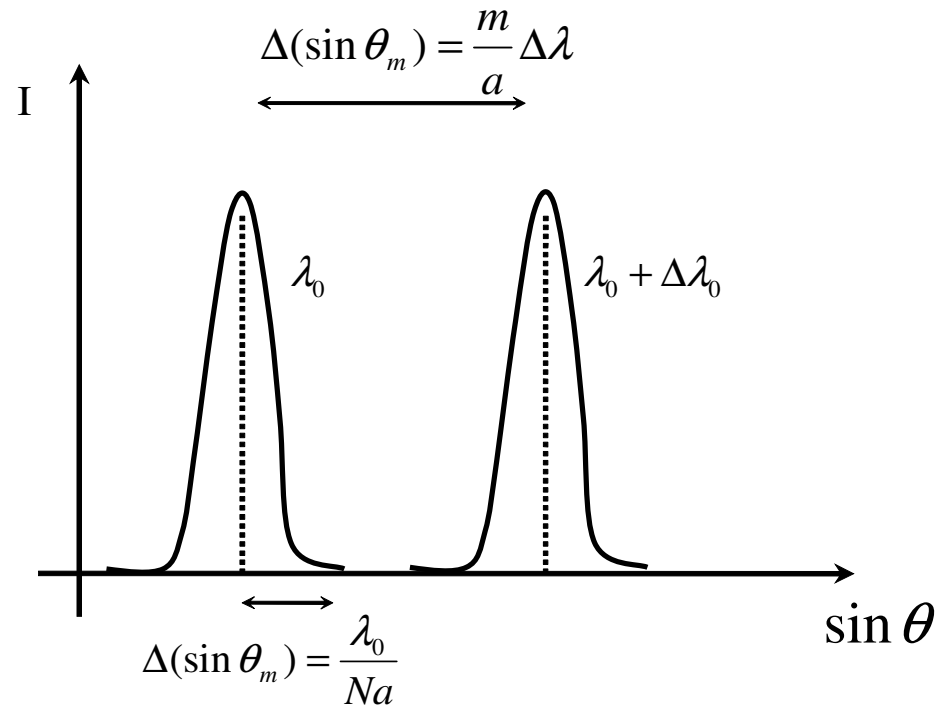


On considère deux radiations lumineuses de longueurs d'onde voisines λ_0 et $\lambda_0 + \Delta\lambda$ (lampe à vapeur de sodium, par exemple).

On souhaite, dans un ordre donné m , résoudre ces deux raies séparées de $\Delta\lambda$.



On voit sur l'écran ou à travers la lunette auto-collimatrice :



La résolution théorique du réseau est :

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda_0}{\Delta \lambda} = m \frac{L}{a} = mN$$

Par exemple, dans le cas du sodium :

$$\lambda_0 = 589 \text{ nm} \quad ; \quad \Delta\lambda = 0,6 \text{ nm} \quad ; \quad \mathfrak{R} = 982 \approx 1\,000$$

A l'ordre 1, on peut choisir $N = 1\,000$. A l'ordre 2, $N = 500$.

Dispersion angulaire du réseau :

On montre que la dispersion angulaire du réseau vaut :

$$\mathfrak{S}_{ang} = \frac{d\theta_m}{d\lambda_0} = \frac{m}{a \cos \theta_m}$$

La dispersion est d'autant plus élevée que l'ordre est grand et le pas du réseau petit.

Exercice d'application :

- On considère un réseau de $n=1100$ traits/mm, délimité par une monture de 35 mm sur 35 mm.
- Il est éclairé par un faisceau lumineux **parallèle**, sous un angle d'incidence noté i (compté à partir de la normale au plan du réseau) ; l'observation se fait à l'**infini**, selon une direction variable notée θ .
- On a donc i et $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.
- On prendra pour limites du spectre visible les longueurs d'onde $\lambda_V = 0,400\mu m$ et $\lambda_R = 0,750\mu m$

1) Quel est l'ordre maximal p_{\max} observable pour chacune des radiations extrêmes du spectre visible ?

2) On s'intéresse, pour un angle i donné, à la « **dispersion angulaire** » $\frac{d\theta}{d\lambda}$ du réseau ;

calculer cette grandeur dans le **second** ordre et au **minimum** de déviation, pour $\lambda = 0,5890\mu m$.

3) Par ailleurs, on rappelle que le « **pouvoir de résolution** » du réseau, au sens de Rayleigh, est donné par :

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\min}} = pN$$

où $\delta\lambda_{\min}$ est le plus petit écart de longueur d'onde (à partir de λ donnée) pouvant être mis en évidence par le spectroscope, p est l'ordre d'observation et N est le nombre total de traits du réseau.

a) Calculer R pour la radiation précédente et dans le second ordre ; en déduire $\delta\lambda_{\min}$.

b) L'observation se fait dans le plan focal d'une lentille de distance focale $f = 1 \text{ m}$; quelle est, dans le second ordre et au minimum de déviation, la distance entre les images des raies de longueur d'onde $\lambda = 0,5890 \mu\text{m}$ et $\lambda + \delta\lambda_{\min}$, dans le plan focal de la lentille ?

c) Ces deux raies sont-elles résolues spatialement si l'image est obtenue grâce à un capteur CCD (« Charge Coupled Device ») constitué de cellules élémentaires (« pixels ») de $10 \mu\text{m}$ de côté ?

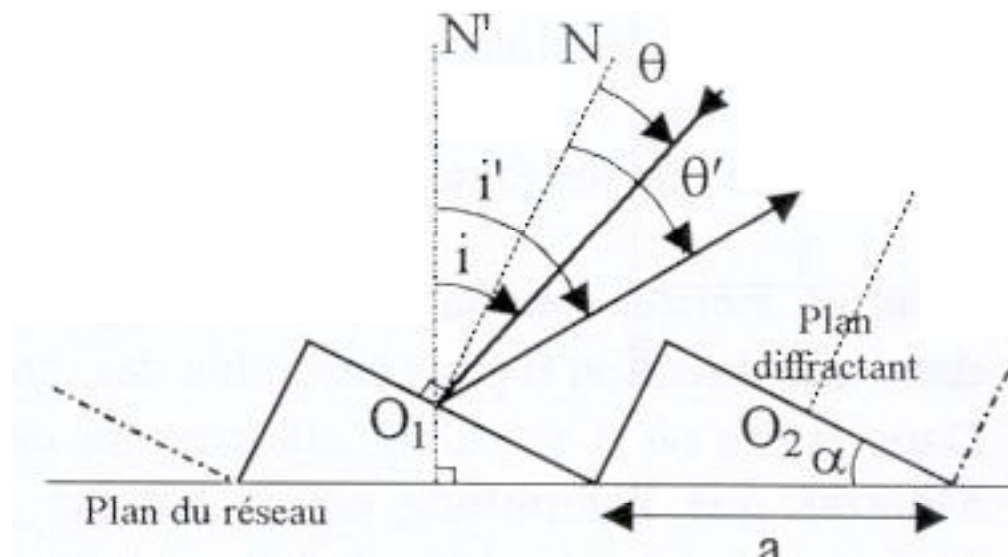
Que peut-il se passer si la focale de la lentille est nettement plus courte ou si les cellules du capteur sont plus larges ?

VI) Etude d'un réseau à échelottes :

Un réseau à échellette est obtenu en traçant sur une surface métallique des dents de scie dont la coupe est représentée sur la figure. Les bandes utiles réfléchissantes, de largeur b , sont inclinées d'un angle α et constituent un réseau de N bandes de pas

$$a = \frac{b}{\cos \alpha}.$$

On éclaire ce réseau à l'aide d'un faisceau parallèle monochromatique incident sous l'angle i et on observe la lumière diffractée dans la direction i' .



1) Calculer l'amplitude diffractée par une bande dans la direction i' ? Dans quelle direction trouve-t-on un maximum ? Une amplitude nulle ?

2) Calculer l'intensité totale diffractée par le réseau dans la direction i' .

3) Tracer les deux graphes des fonctions de diffraction et d'interférence. En déduire que l'on peut ajuster les paramètres du réseau de telle sorte que, pour une longueur d'onde donnée, seul le maximum d'ordre p soit lumineux et tous les autres éteints.

